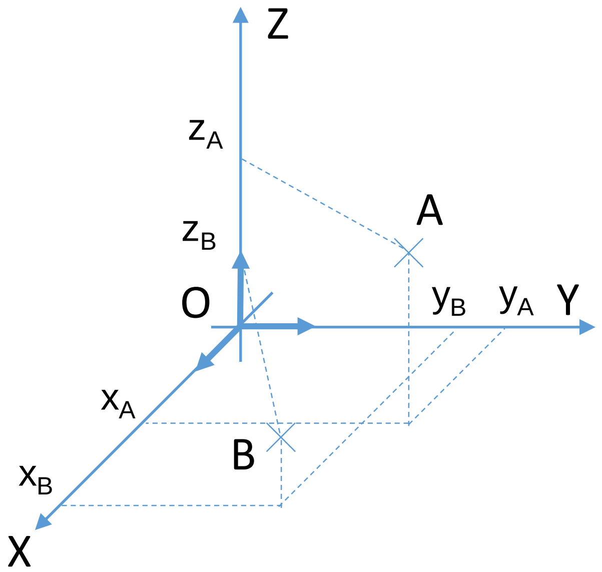
Chapitre I : Calcul vectoriel

Calculs vectoriels : Rappels

Espace euclidien à trois dimensions dans lequel est définie une base orthonormée positive.

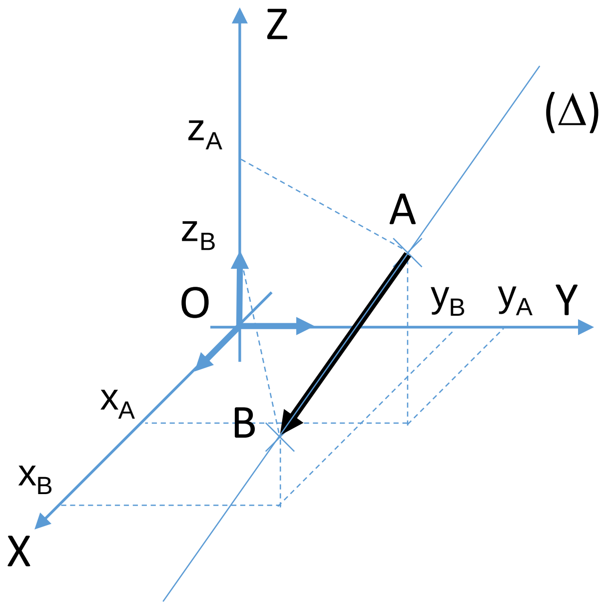
Coordonnées de points



$$A \left| \begin{array}{l} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array} \right.$$

Vecteur lié : couple ordonné de deux points A et B noté $\overrightarrow{AB}$ $\left| \begin{array}{l} x_{AB} = x_B - x_A \\ y_{AB} = y_B - y_A \\ z_{AB} = z_B - z_A \end{array} \right.$

1 - support : droite (Δ) passant par AB
2 - sens : celui de A vers B
3 - module : distance de A à B : $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{X_{AB}^2 + Y_{AB}^2 + Z_{AB}^2}$
4 - point d'application A



- 6 coordonnées pour définir un vecteur lié.
- Un seul représentant.
- Deux vecteurs liés sont dits équipollents si leurs supports sont parallèles et si ils ont même sens et même module.

Vecteur libre :

C'est la classe d'équivalence d'un vecteur lié donné, cad l'ensemble des vecteurs équipollents à un vecteur lié donné.

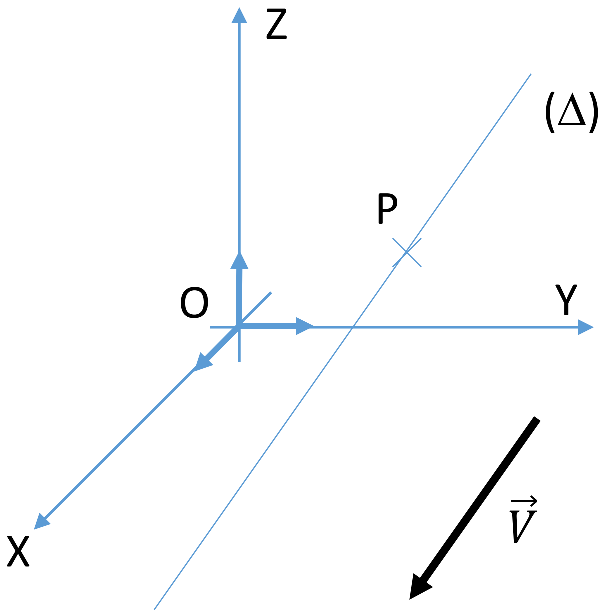
Un vecteur libre comporte une infinité de représentants.
Il faut 3 coordonnées pour définir un vecteur libre

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} x_v \\ y_v \\ z_v \end{array} \right.$$

Vecteur glissant :

1 - Un vecteur libre $\vec{V}$

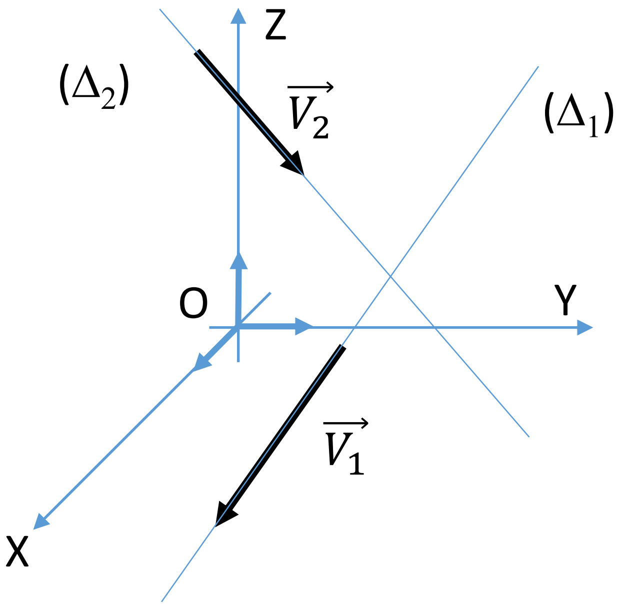
2 - Un point P du support (Δ)

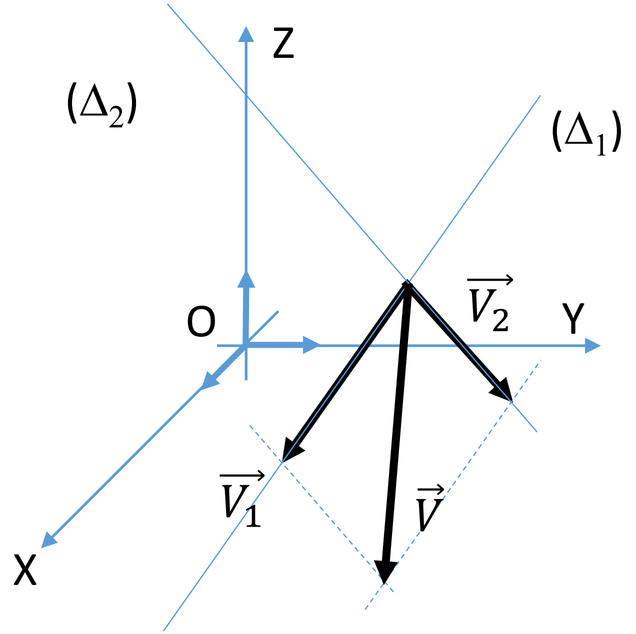


1 - support : droite (Δ) passant par (P)
2 - sens : celui de $\vec{V}$
3 - module : $|\vec{V}| = \sqrt{X_V^2 + Y_V^2 + Z_V^2}$

CALCULS VECTORIELS : Opérations

Addition $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ $\quad \vec{V_1} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \quad \vec{V_2} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} \quad \vec{V} \begin{vmatrix} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \\ z = z_1 + z_2 \end{vmatrix}$



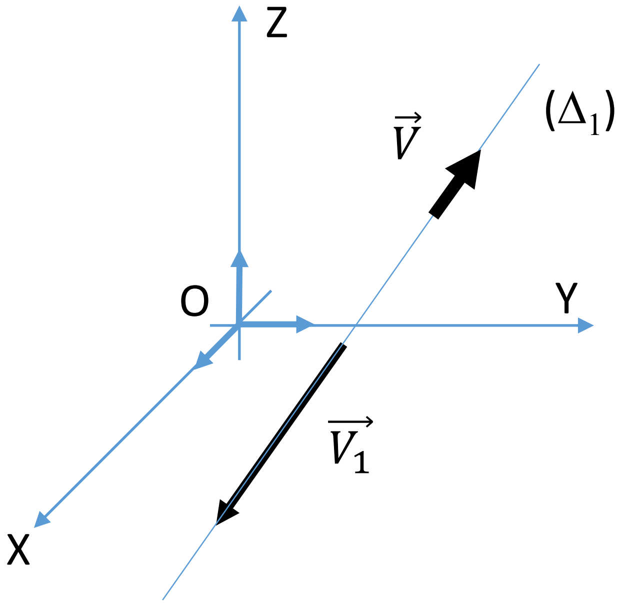


L'addition est associative et commutative

$$\vec{V_1} + (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = (\vec{V_1} + \vec{V_2}) + \vec{V_3}$$

$$(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = (\vec{V_2} + \vec{V_1})$$

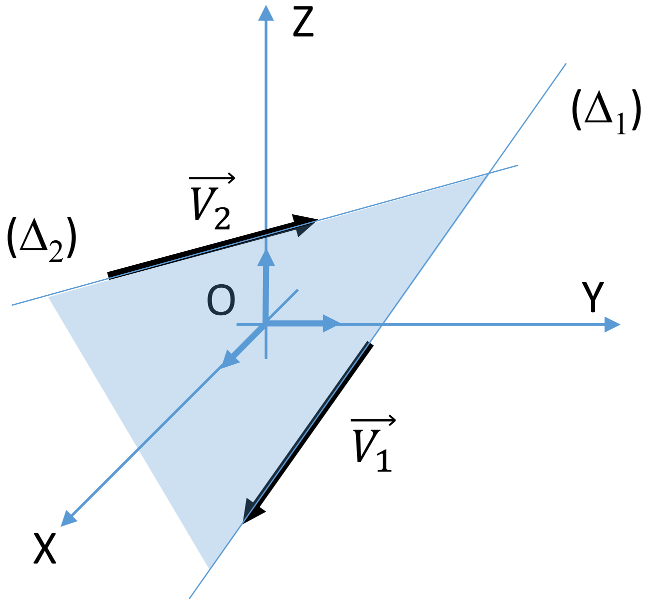
Multiplication $\vec{V} = \lambda * \vec{V_1} = \begin{vmatrix} x = \lambda \,.\, x_1 \\ y = \lambda \,.\, y_1 \\ z = \lambda \,.\, z_1 \end{vmatrix}$



- support : même que $\vec{V}$
- sens : même que $\vec{V}$ si , λ >0 sinon opposé
- norme : $|\lambda \,.\, \vec{V}| = |\lambda| . |\vec{V}|$

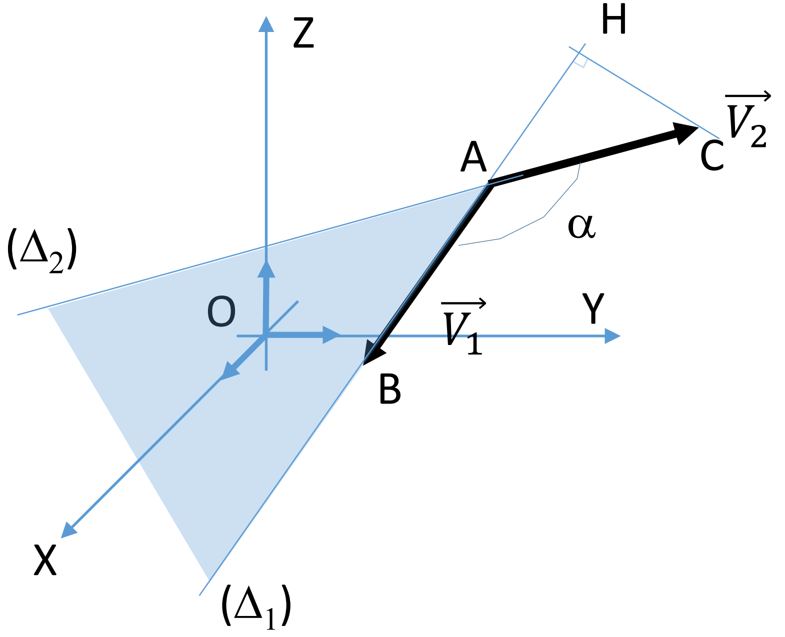
CALCULS VECTORIELS : Opérations

Produit scalaire $\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = scalaire$



$$\vec{V_1}\ \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V_2}\ \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$$



$$\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|\,.\,\|\vec{V_2}\|\,.\cos(\alpha)$$

$$= \overline{AB}\,.\,\overline{AH}$$

$$\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = X_1.X_2 + Y_1.Y_2 + Z_1.Z_2$$

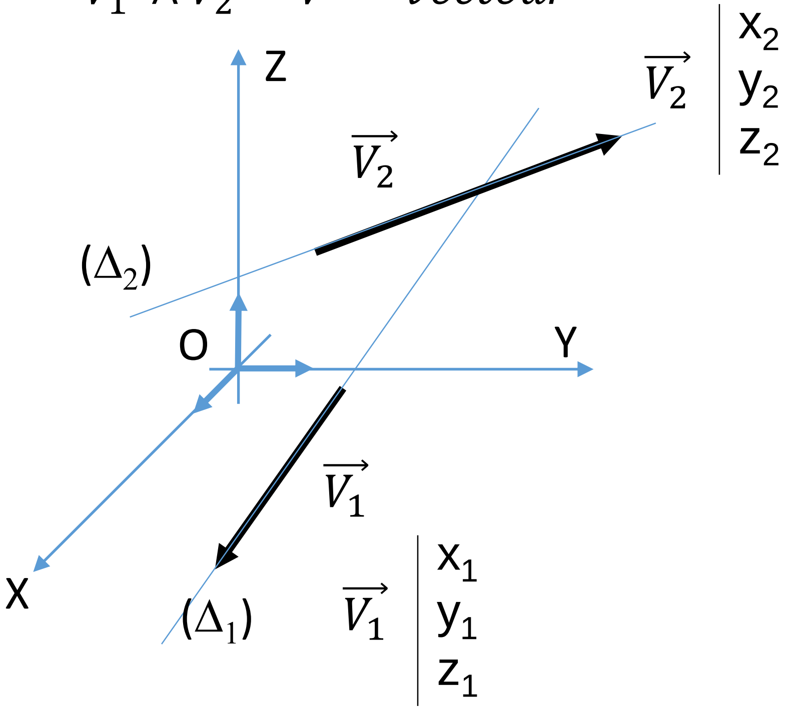
Propriétés $\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = \vec{V_2}\,.\,\vec{V_1}$ $\qquad \vec{V_1}\,.\,\vec{V_1} = \|\vec{V_1}\|^2$

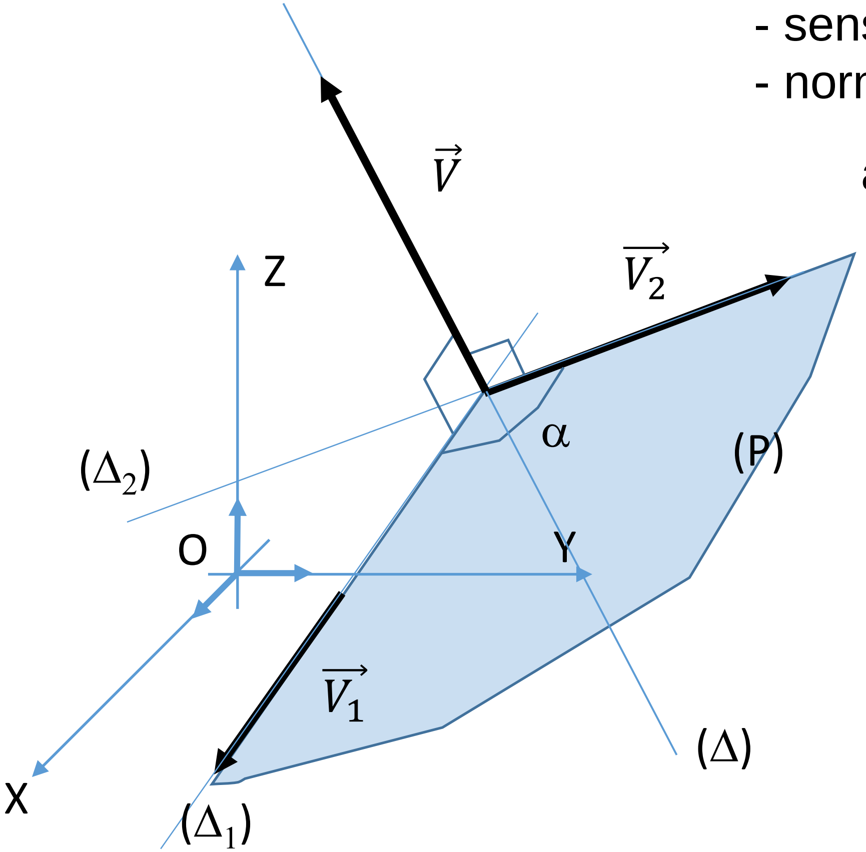
$$\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = 0 \quad \begin{vmatrix} \vec{V_1} = 0 \\ \vec{V_2} = 0 \\ \vec{V_1} \perp \vec{V_2} \end{vmatrix}$$

CALCULS VECTORIELS : Opérations

Produit vectoriel

$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \vec{V} = \ vecteur$





- support : Δ est perpendiculaire au plan (P)
- sens : tel que le trièdre $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \vec{V}$ soit direct
- norme : $\|\vec{V}\| = \|\overrightarrow{V_1}\| . \|\overrightarrow{V_2}\| . \sin(\alpha)$

aire parallélogramme construit sur $\overrightarrow{V_1}\ \overrightarrow{V_2}$

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \vec{V} = det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} Y_1.Z_2 - Z_1.Y_2 \\ Z_1.X_2 - Z_2.X_1 \\ X_1.Y_2 - X_2.Y_1 \end{bmatrix}$$

Propriétés

Non commutative $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = -(\overrightarrow{V_2} . \overrightarrow{V_1})$

Distributive / l'addition $\overrightarrow{V_1} \wedge (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) + (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_3})$

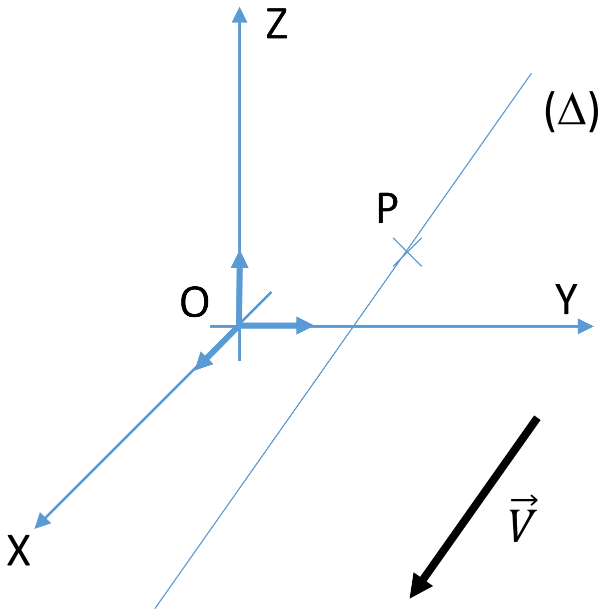
Associative / multiplication scalaire $\lambda . (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) = (\overrightarrow{V_1} \wedge \lambda . \overrightarrow{V_2})$

$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = 0$ $\overrightarrow{V_1} = 0$ ou $\overrightarrow{V_2} = 0$ ou $\overrightarrow{V_1}$ *et* $\overrightarrow{V_2}$ *colinéaires*

VECTEURS GLISSANTS

Un vecteur glissant est défini par :

Un vecteur libre $\vec{V}$
Un point P du support (Δ) ou (Δ) lui-même.

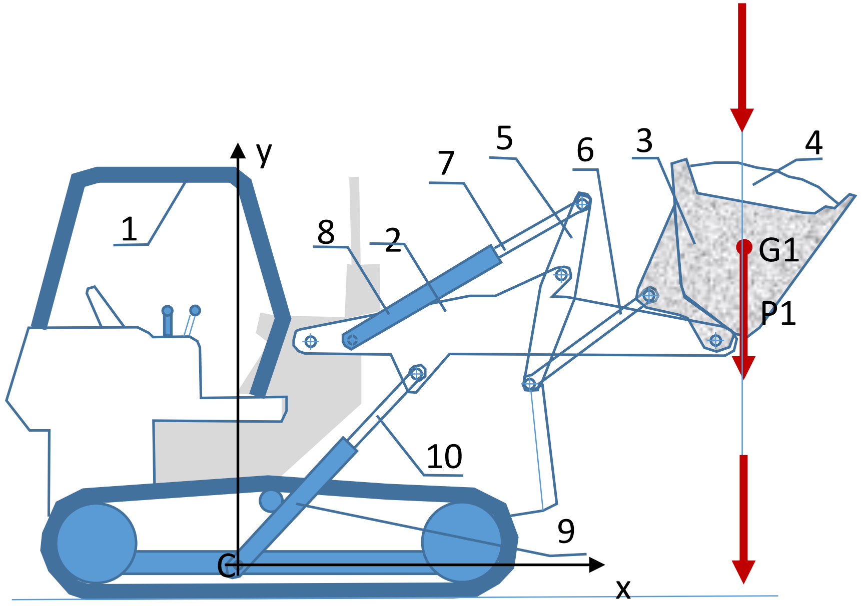


direction : donnée par le support (Δ)
sens : donné par le vecteur $\vec{V}$
module : donné par le vecteur $\vec{V}$
Notation : g(Δ, $\vec{V}$)

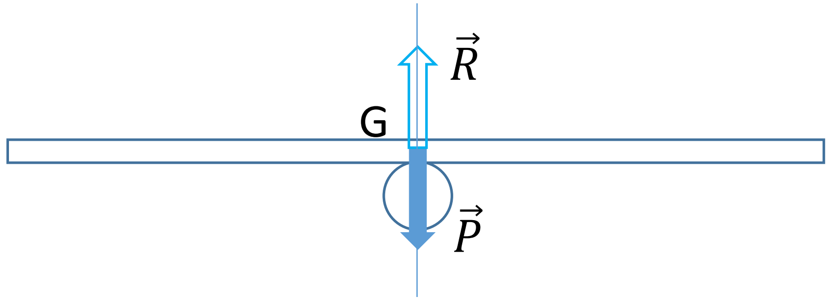
Remarque : $\vec{V}$ est le représentant du glisseur.
il n'y a pas de notion de point d'application , d'origine et d'extrémité.
Il possède une infinité de représentants sur la droite Δ.

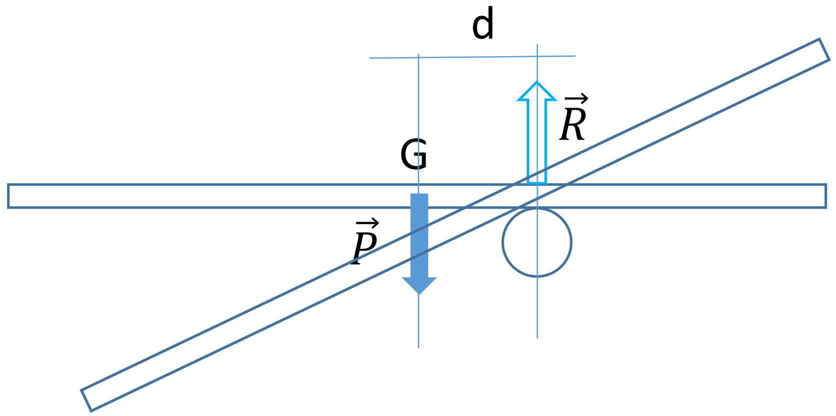
En Mécanique, les forces ou les actions mécaniques sont caractérisées par :
- leur intensité
- leur direction ou ligne d'action
- leur sens

Le point d'application de l'effort est sans importance.
Ceci conduit à modéliser les actions mécaniques par des vecteurs glissants.



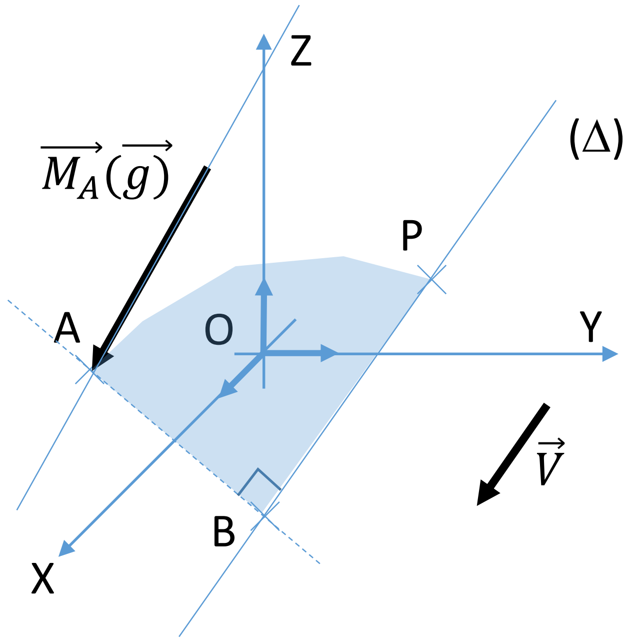
VECTEURS GLISSANTS : MOMENT EN UN POINT D'UN VECTEUR GLISSANT





Le moment en (A) d'un glisseur $\vec{g}_A(\Delta, \vec{V})$ est le vecteur tel que : $\vec{M}_A(\vec{g}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}$

où P est un point quelconque de (Δ)



- Le moment $\vec{M}_A(\vec{g})$ est indépendant du point P
- Le moment $\vec{M}_A(\vec{g})$ est orthogonal à $\vec{V}$
- le module $\|\vec{M}_A(\vec{g})\| = h \, . \, \overline{\|V\|}$
- Cas de nullité : $A \in (\Delta), \vec{V} = \vec{o}, \overrightarrow{AP} \parallel \vec{V}$

VECTEURS GLISSANTS : MOMENT EN UN POINT D'UN VECTEUR GLISSANT

Définition analytique

$$\vec{g}_A(\Delta,\vec{V}) \left| \begin{array}{l} \vec{V} \\ \\ \vec{M}_A(\vec{g}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V} \end{array} \right.$$

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right. \qquad \vec{M}_A(\vec{g}) \left| \begin{array}{l} L \\ M \\ N \end{array} \right.$$

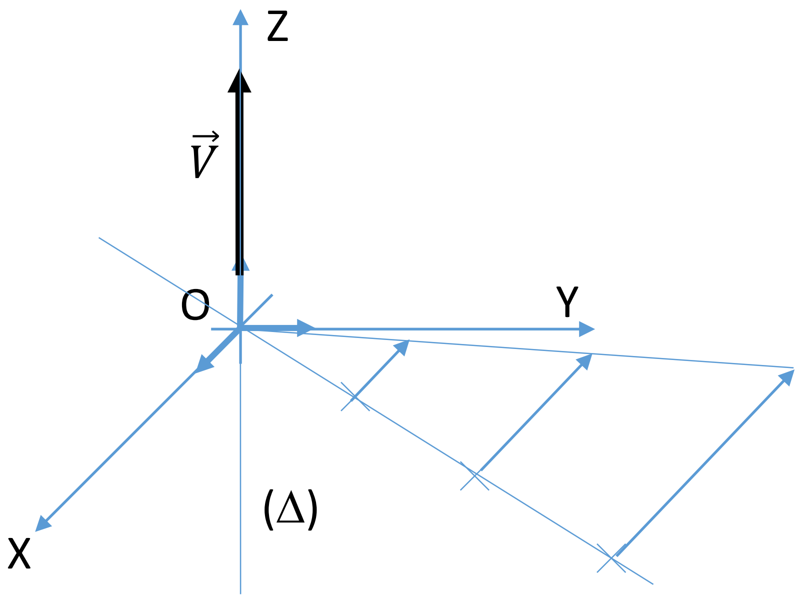
Par définition :

$$\vec{M}_A(\vec{g}) \perp \vec{V} \Rightarrow \vec{M}_A(\vec{g}) \,.\, \vec{V} = 0 \Rightarrow X.L + Y.M + Z.N = 0$$

Transport du moment

$$\boxed{\vec{M}_B(\vec{g}) = \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V} = \vec{M}_A(\vec{g}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}}$$

Distribution linéaire du moment

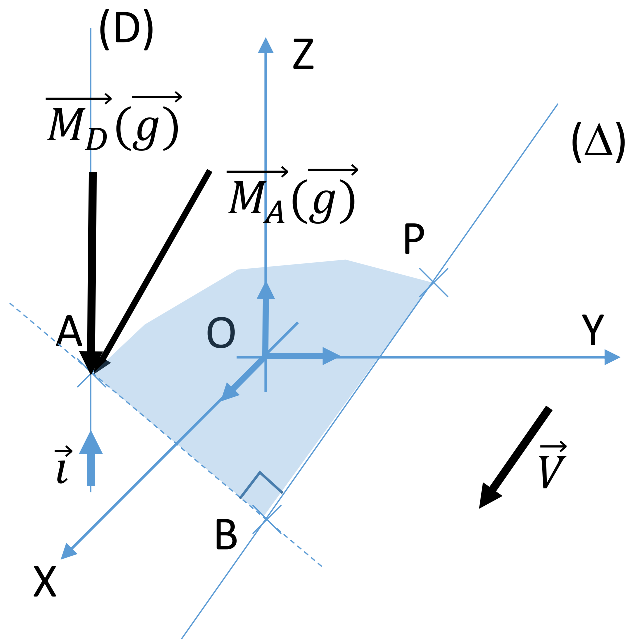


Moment / axe

Soit $\vec{g}_A(\Delta,\vec{V})$ un vecteur glissant et (D) un axe passant par le point A, orienté par un unitaire $\vec{\imath}$.

Par définition, le moment de $\vec{g}_A(\Delta,\vec{V})$ par rapport à l'axe (D) est la projection de $\overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{g})$ sur (D), soit :

$$\boxed{\vec{M}_{(D)}(\vec{g}) = \vec{M}_A(\vec{g}).\vec{\imath}}$$



TORSEURS:

Un torseur est défini par la somme de (n) glisseurs :

$$\left(\vec{g}_1(\Delta_1,\overrightarrow{V_1})\right)_P + \left(\vec{g}_2(\Delta_2,\overrightarrow{V_2})\right)_P + \ \dots\dots + \left(\vec{g}_n(\Delta_n,\overrightarrow{V_n})\right)_P$$ exprimés en un même point (P)

Il est défini en (P) par ses ELEMENTS DE REDUCTION

$$[T]_P \left| \begin{array}{l} \vec{S} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \ \dots. \ + \overrightarrow{V_n} \\ \overrightarrow{M}_P(\vec{T}) = \ \overrightarrow{PP_1} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{PP_2} \wedge \overrightarrow{V_2} + \ \dots\dots + \overrightarrow{PP_n} \wedge \overrightarrow{V_n} \end{array} \right.$$

$\vec{S} \left| \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right.$ coordonnée SOMME ou RESULTANTE

$\overrightarrow{M}_P(\vec{T}) \left| \begin{array}{l} L \\ M \\ N \end{array} \right.$ coordonnée MOMENT

$\vec{S}$ ne dépend pas du point considéré. La résultante d'un torseur est un invariant.

Transport d'un torseur

Les éléments de réduction en P nous permettent de calculer l'expression du torseur [T] en B quelconque

$$\boxed{[T]_B \left| \begin{array}{l} \vec{S} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \ \dots. \ + \overrightarrow{V_n} \\ \overrightarrow{M}_B(\vec{T}) = \overrightarrow{M}_P(\vec{T}) + \overrightarrow{BP} \wedge \vec{S} \end{array} \right.}$$

TORSEURS:

Torseurs équivalents

Deux torseurs sont équivalents si ils ont même éléments de réduction en un point donné de l'espace.
Si cela est vrai en un point, cela est vrai en tous points.

Combinaison linéaire de torseurs

Soient a et b deux scalaires et $[T1]_P$ et $[T2]_P$ deux torseurs exprimés en un même point (P)

$$[T]_P = a.[T_1]_P + b.[T_2]_P = \left| \begin{array}{l} \vec{S} = a.\overrightarrow{V_1} + b.\overrightarrow{V_2} \\ \vec{M}_P(\vec{T}) = a.\overrightarrow{(M_1)_P} + b.\overrightarrow{(M_2)_P} \end{array} \right.$$

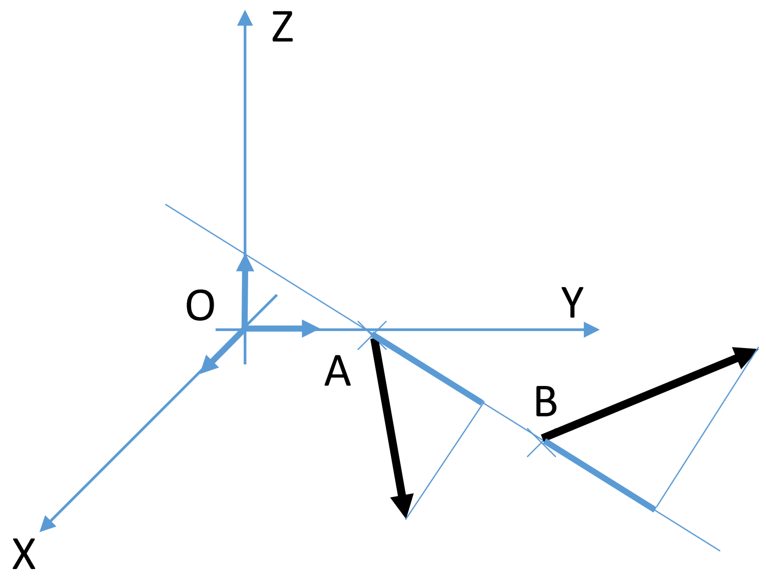
- Le calcul est possible que si les éléments de réductions sont exprimés en un même point (P)
- Si a=b=1, alors $[T]_P$ représente le somme de $[T_1]_P$ et $[T_2]_P$

Equiprojectivité

Le champ des moments est équiprojectif

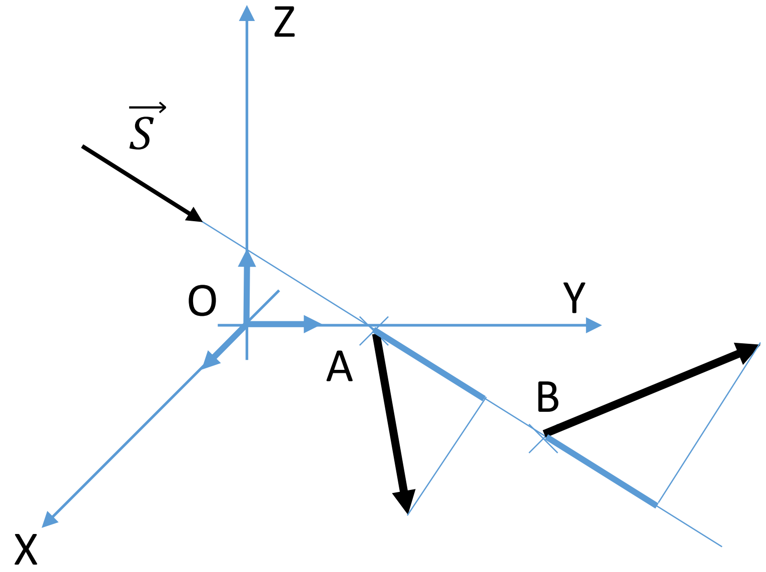
$$\vec{M}_A(\vec{T}).\overrightarrow{AB} = \vec{M}_B(\vec{T}).\overrightarrow{AB}$$

Les projections des moments $\vec{M}_A(\vec{T})$ et $\vec{M}_B(\vec{T})$ d'un torseur $[T]_P$ sur la droite (AB) sont égales



TORSEURS:

Invariant scalaire



Le produit scalaire de la résultante par le moment est un invariant

$$I = \vec{S} \,.\, \vec{M}_A(\vec{T}) = \vec{S} \,.\vec{M}_B(\vec{T})$$

Axe Central d'un torseur

L'axe central d'un torseur $[T]_P$ est la droite (D) telle que en tous point (P) de cette droite, la résultante $\vec{S}$ est colinéaire au moment $\vec{M}_P(\vec{T})$. Il est appelé Moment central.

$$\lambda \,.\vec{S} \;= \vec{M}_P(\vec{T})$$

Le moment central est un invariant
Le moment central a la valeur minimale.
(D) est l'ensemble des points de l'espace où le moment est minimun.

Recherche de l'axe central

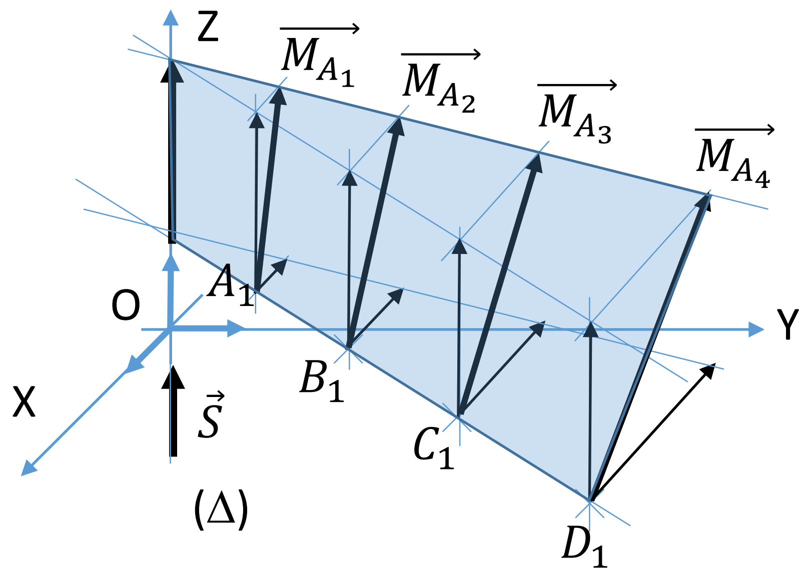
Pour déterminer la position de l'axe central (D), il suffit de connaitre 1 point de (D). Soit A un point de (D), alors :

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{M_0} \wedge \vec{S}}{\|\vec{S}\|^2}$$

TORSEURS:

Structure du champs de moments

En prenant des points A_1, B_1, C_1, D_1.... alignés sur une perpendiculaire en H_1 à (D), une image du champ des moments est donnée par :



le champ des moments du torseur est un champ hélicoïdal d'axe (Δ)

TORSEURS PARTICULIERS

Couples

On appelle couple tout torseur dont la résultante est nulle

Le moment d'un couple est donc un champ uniforme.

$$[T]_P \left| \begin{array}{l} \vec{S} = \vec{0} \\ \vec{M}_P(\vec{T}) \end{array} \right.$$

Glisseurs

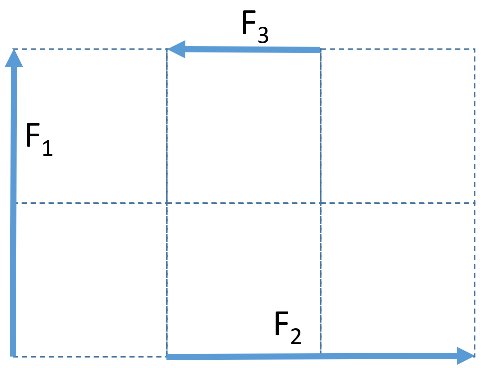
Un glisseur est un torseur dont le moment central est nul.
Il doit vérifier la relation

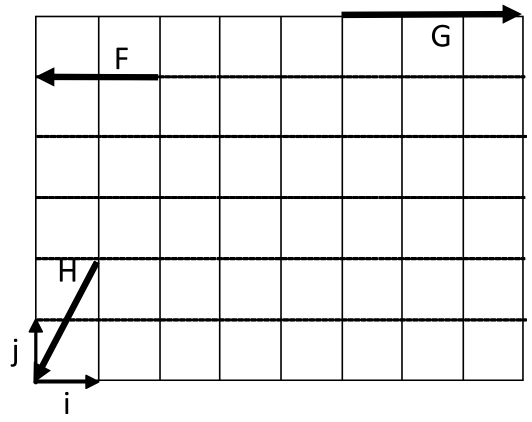
$$\vec{M}_A(\vec{g}) \perp \vec{V} \Rightarrow \vec{M}_A(\vec{g}) \,.\, \vec{V} = 0 \Rightarrow X.L + Y.M + Z.N = 0$$

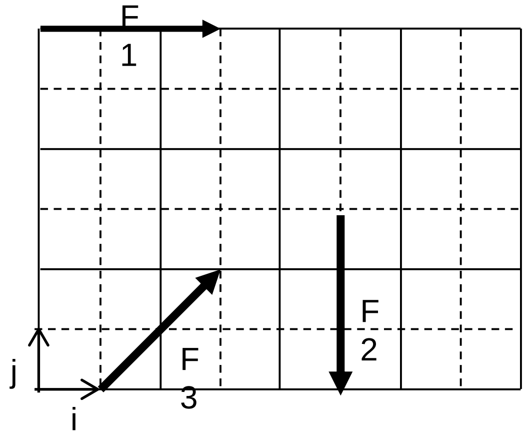
Remarque : Un système de forces coplanaires est équivalent à un glisseur

Exercices :

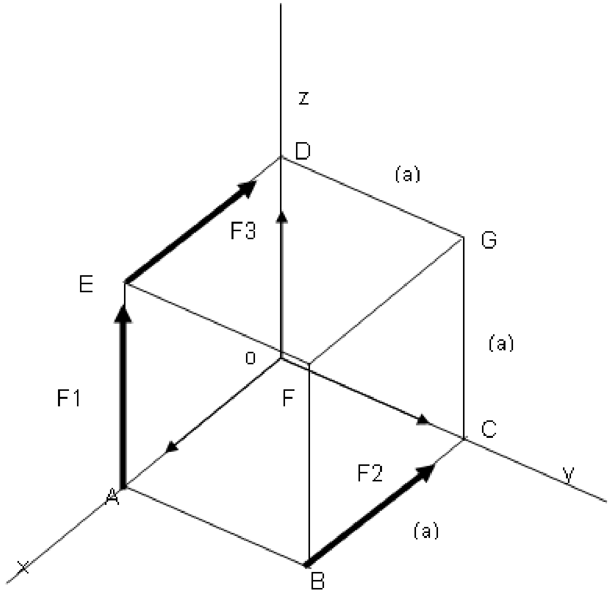
Faire la somme des 3 vecteurs glissants.- Identifier graphiquement le torseur équivalent et l'axe central

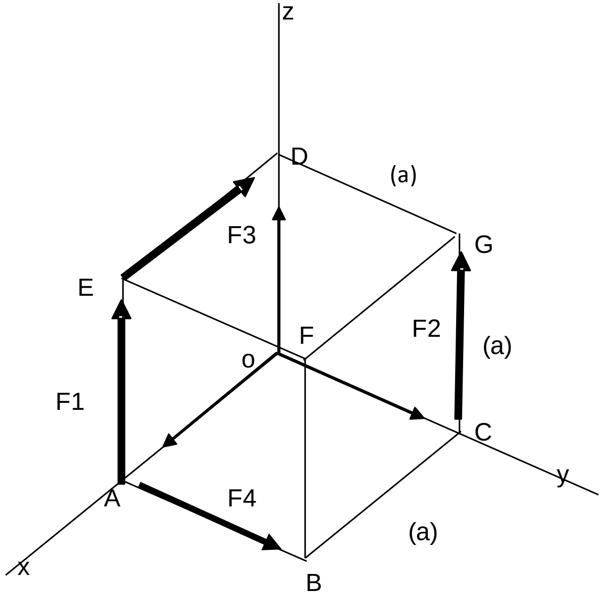


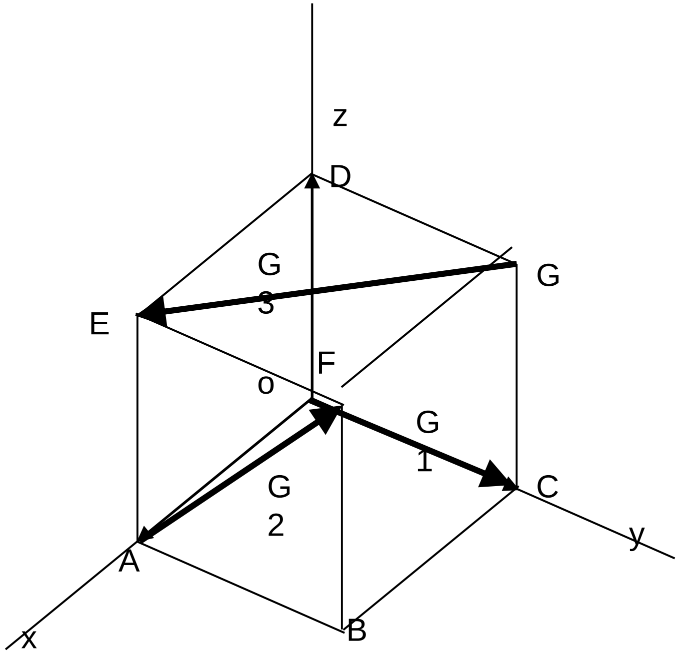




Faire la somme des 3 vecteurs glissants G1,G2 et G3 en O - Identifier le torseur équivalent G - Identifier l'axe central.







Chapitre II : Statique

La statique couvre l'étude des forces extérieures agissant sur un solide au repos.
L'utilisation des équations d'équilibre statique permettent de déterminer les réactions d'appui et les efforts qui transites par les liaisons.

FORCES

Une force est une grandeur vectorielle. Elle est donc caractérisée par :

- sa ligne d’action
- son sens
- son intensité

Elle peut donc être modélisée par un vecteur glissant. En statique, la notion de point d’application n’intervient pas.
Par définition des torseurs, un ensemble de plusieurs forces donc modélisées par plusieurs vecteurs glissants et est modélisée par un torseur équivalent.

EQUILIBRE STATIQUE D’UNE STRUCTURE

Un solide (S) est en équilibre si il est immobile par rapport à un repère Galiléen, repère lié à la terre en mécanique industrielle. Ceci impose que le torseur des efforts extérieurs appliqués à (S) est égal au torseur nul, soit :

- La résultante des forces appliquées à ce solide doit être égale à zéro
- Le moment de toutes ces forces par rapport à un point quelconque (P) doit aussi être nul.

$$[T_{ext\to S}]_P \left| \begin{array}{l} \vec{S} = \vec{0} \\ \vec{M}_P(\vec{T}) = \vec{0} \end{array} \right.$$

Remarque :
Si un solide (S) en équilibre est soumis à 2 forces, ces deux forces sont opposées et ont même support
Si un solide (S) en équilibre est soumis à 3 forces, ces trois forces sont coplanaires, leur somme vectorielle est nulle, les lignes d’action sont concourantes ou parallèles.

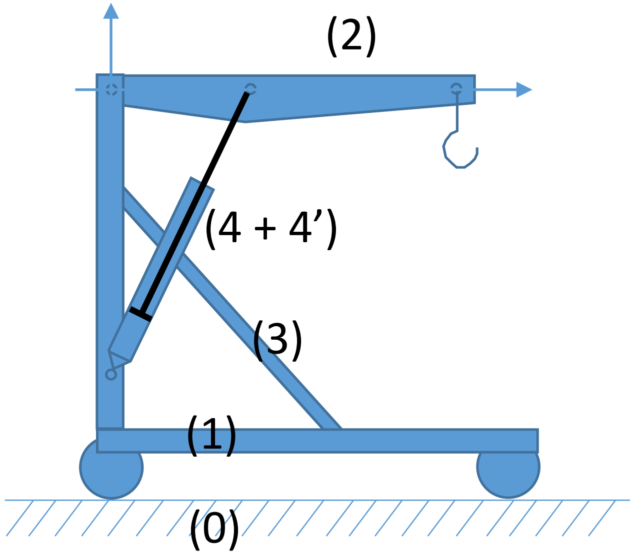
CAS D’UN SYSTÈME MÉCANIQUE.

Système Mécanique en EQUILIBRE	⟺	Chaque constituant est en EQUILIBRE

Un système mécanique est en équilibre si chaque solide qui le constitue est en équilibre.
Si un système se compose de N solides, alors on obtient :
6*N équations statiques pour les problèmes en 3D
3*N équations statiques pour les problèmes plans

Exemple : Grue d’atelier

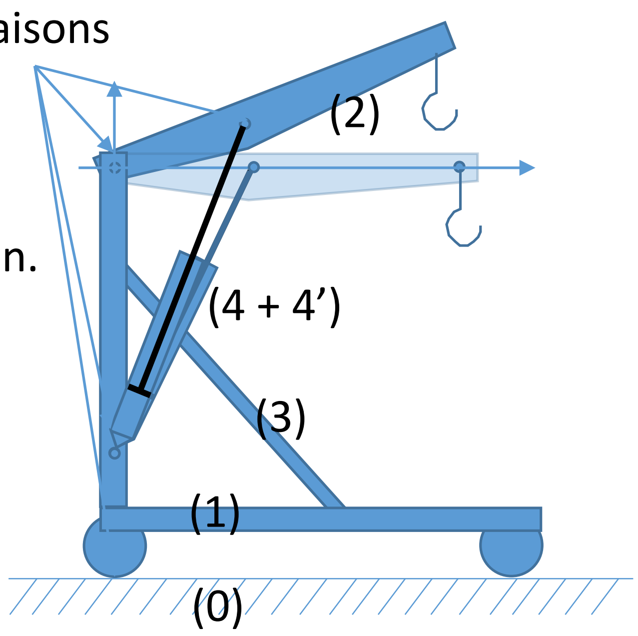

Système réel



Modèle

(0) -> Sol
(1) -> Bâti
(2) -> Bras
(3) -> Renfort
(4) -> Vérin

CARACTÉRISATION D'UNE LIAISON, DEGRÉS CINÉMATIQUES



Soit deux solides (S1) et (S2) liés par une liaison L1. Sans L1, le déplacement de S2 par rapport à S1 comporte 6 degrés de liberté (ddl) : 3 degrés de translation, 3 degrés de rotation.
La liaison (L) entre 2 solides S1 et S2 limite certain mouvement de S2 / S1.
On appelle degrés de liberté d'une liaison L1 reliant 2 solides S1 et S2, le nombre de mouvements indépendants que peut avoir S2 / S1. Il est noté **Nc**.

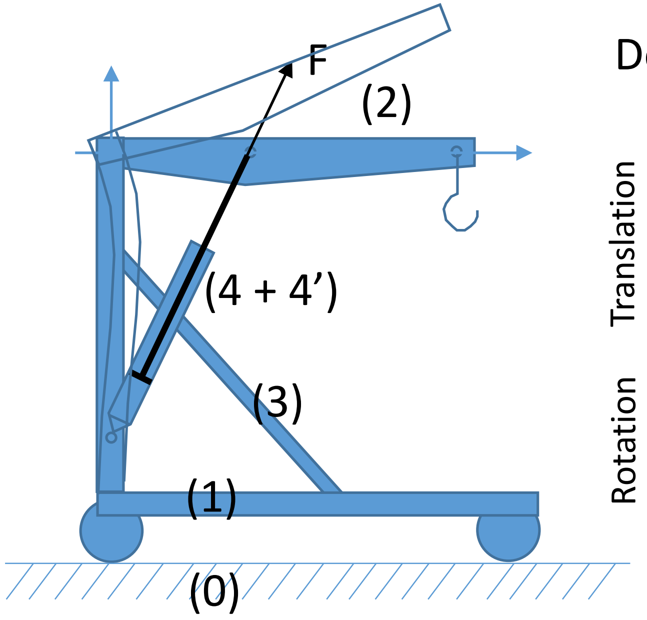
TORSEUR DES ACTIONS TRANSMISSIBLES PAR UNE LIAISON, DEGRÉS DE LIAISON

Pour définir le torseur $[T_{2\to 1}]_P$ des actions transmissibles par la liaison L1 située en P, il faut connaitre la résultante $\vec{S}$ et le moment résultant $\vec{M}_P\left(\overrightarrow{T_{2\to 1}}\right)$ au point (P) de la liaison.
Il représente les actions mécaniques exercées par S2 sur S1 par l'intermédiaire de la liaison
On appelle degrés de liaison le nombre de composantes non nulles du torseur des actions transmissibles par une liaison. Il est noté Ns et est tel que

$$N_s + N_c = 6 \; ou \; 3$$

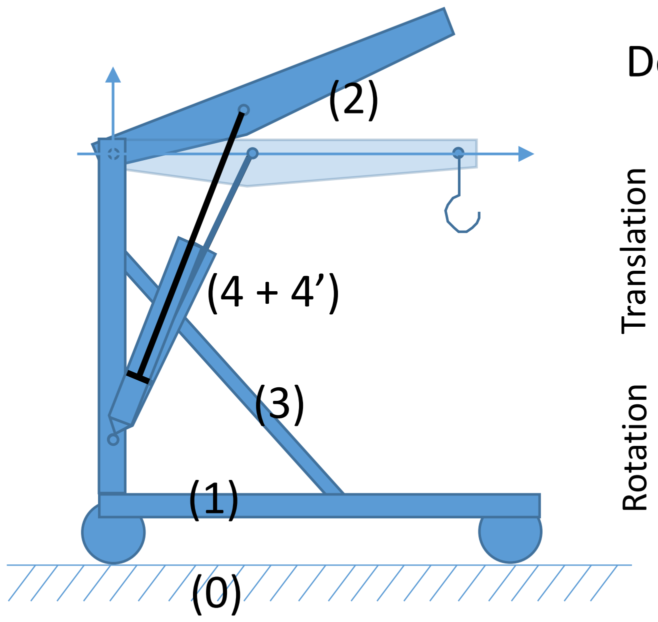
En écrivant que les efforts existant dans la liaison ne travaillent pas, la dualité entre les torseurs des petits déplacements et des efforts transmissibles permet d'écrire :
Si dans une liaison, une translation (ou rotation) par rapport à un axe donné est possible, alors la composante de la résultante (ou du moment) par rapport à cet axe est nulle.

Liaison qui bloque la rotation



	Déplacement	Actions transmissibles	
Translation	$\delta T_x = 0$	$X = ?$	Force
	$\delta T_y = 0$	$Y = ?$	
	$\delta T_z = 0$	$Z = ?$	
Rotation	$\delta \theta_x = 0$	$L = ?$	Moment
	$\delta \theta_y = 0$	$M = ?$	
	$\delta \theta_z = 0$	$N = ?$	

Liaison qui libère la rotation



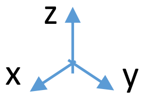
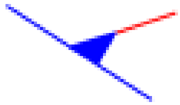
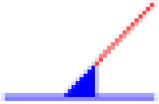
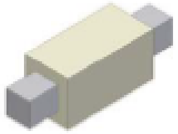
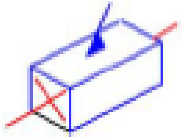
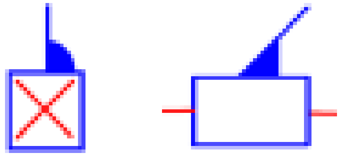
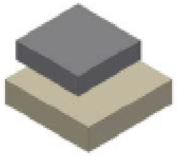
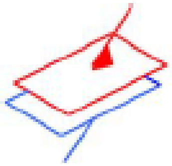
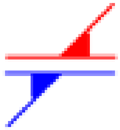
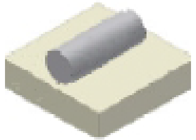
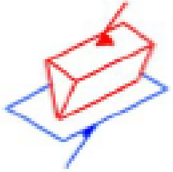
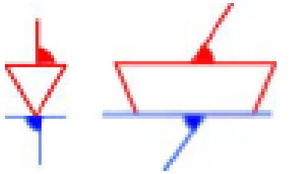
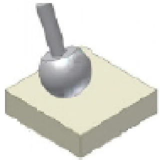
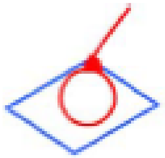
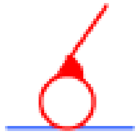
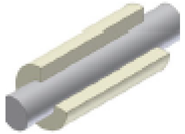
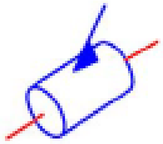
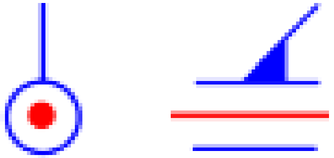
	Déplacement	Actions transmissibles	
Translation	$\delta T_x = 0$	$X = ?$	Force
	$\delta T_y = 0$	$Y = ?$	
	$\delta T_z = 0$	$Z = ?$	
Rotation	$\delta \theta_x = ?$	$L = 0$	Moment
	$\delta \theta_y = ?$	$M = 0$	
	$\delta \theta_z = ?$	$N = 0$	

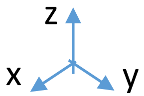
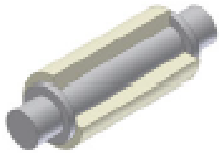
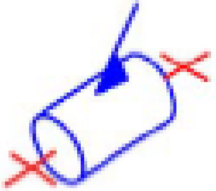
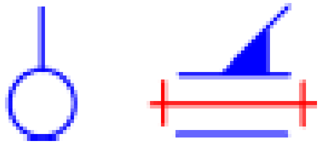
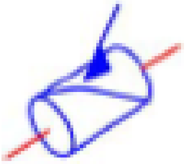
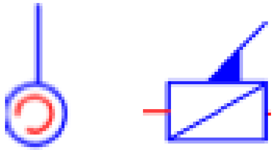
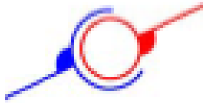
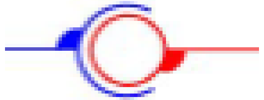
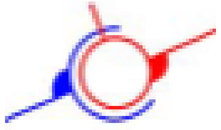
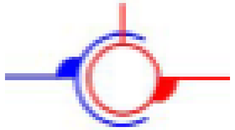
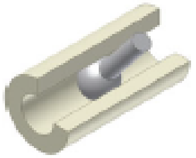
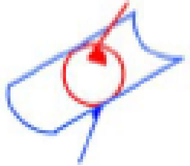
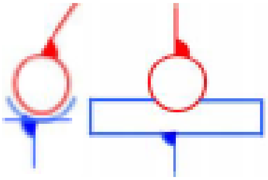
PRINCIPE DES ACTIONS RÉCIPROQUES

$[\vec{T}_{2\rightarrow1}]_P$ représente l’action du solide S2 sur le solide S1 transmise par la liaison L positionnée en P

$[\vec{T}_{1\rightarrow2}]_P$ représente l’action du solide S1 sur le solide S2 transmise par la liaison L positionnée en P

$$[\vec{T}_{2\rightarrow1}]_P = -[\vec{T}_{1\rightarrow2}]_P$$

	**Nom**	**Représentation spatiale**	**Représentation plane**	**Torseur actions transmissibles**
	Encastrement			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$
	Glissière			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$
	Appuis plan			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{bmatrix}$
	Linéaire Rectiligne			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{bmatrix}$
	Ponctuelle			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{bmatrix}$
	Pivot Glissant			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$

	**Nom**	**Représentation spatiale**	**Représentation plane**	**Torseur actions transmissibles**
	Pivot			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$
	Hélicoïdale			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$
	Rotule			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{bmatrix}$
	Rotule à doigt			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & 0 \end{bmatrix}$
	Linéaire annulaire			$[T_L]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{bmatrix}$

NATURE DU SYSTÈME : Isostatisme

Soit un système mécanique composé de N solides reliés entre eux par N_l liaisons.
Chaque liaison est caractérisée par son degré de liaison N_{si}. Le problème global comporte **Is** inconnus

$$I_s = \sum_{i=1}^{Nl} N_{SI}$$

Puisque le système est en équilibre, le principe fondamental de la statique peut être appliqué aux N solides ce qui permet d'obtenir Es équations.

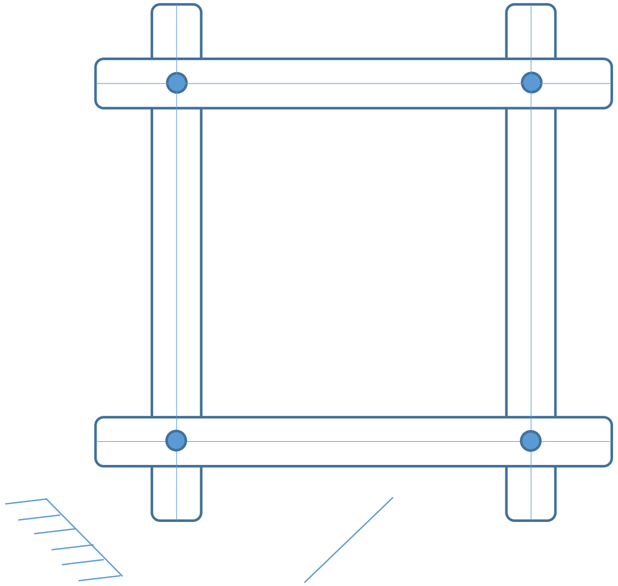
$$E_s = N\,.\,6\;(ou\;3)$$

On obtient ainsi un système linéaire de Es équations à Is inconnues. En introduisant le paramètre Mc degré de mobilité qui est égal au nombre de mouvements possibles indépendants du système, on peut écrire que

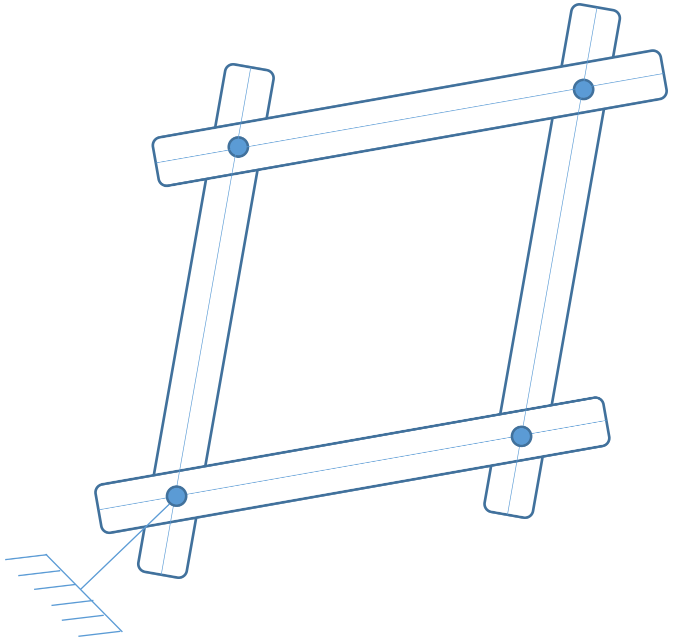
$$(Is + Mc)\; - Es = Ms$$

où Ms représente le degré d'hyperstaticité.
- Si Ms = 0, le système est dit isostatique. Il est possible de déterminer tous les efforts de liaison en écrivant seulement l'équilibre de chaque pièce.
- Si Ms > 0, le système est dit hyperstatique. Il est impossible de déterminer les efforts de liaisons à partir du seul principe de la statique. Le nombre d'inconnus Ms qu'il est impossible de déterminer à partir des équations d'équilibre est le degré d'hyperstaticité du système.
- Si Ms < 0, le système est dit hypostatique. Le système est instable. L'immobilité des pièces les une par rapport aux autres n'est pas assurée.

NATURE DU SYSTÈME : hypostatisme

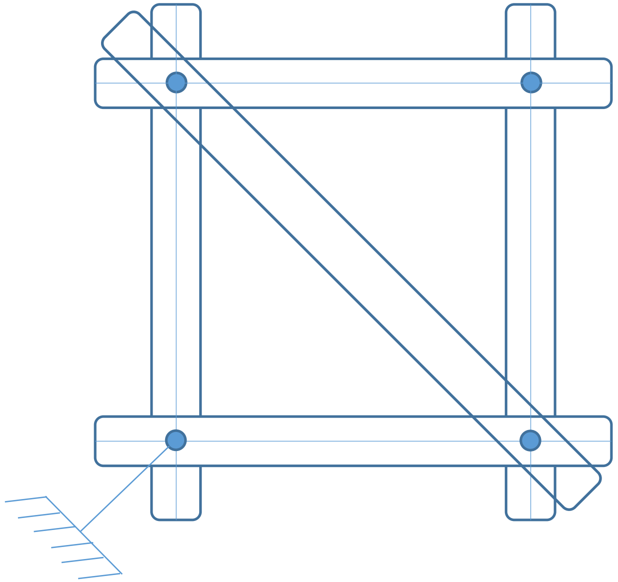


4 barres -> Es = 3 x 4 = 12
4 pivots + 1 encastrement
-> Is = 4x2 + 3 = 11
Pas de mobilité Mc = 0
Ms = 1->hypostatique

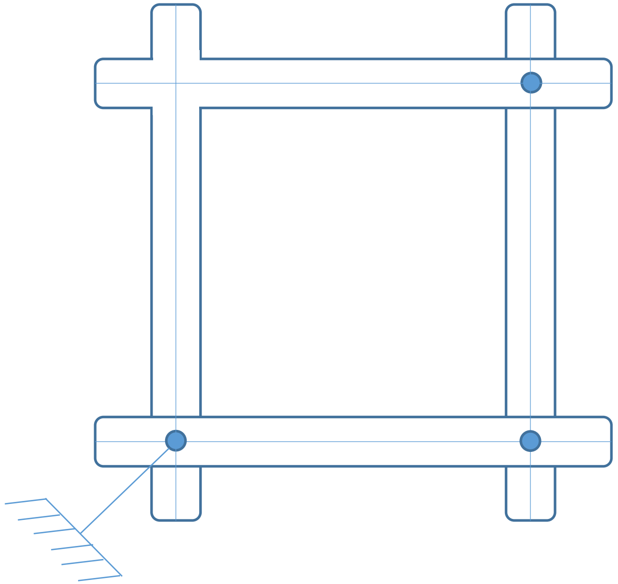


Immobilité des éléments constituant
le système non assurée

NATURE DU SYSTÈME : Isostatisme

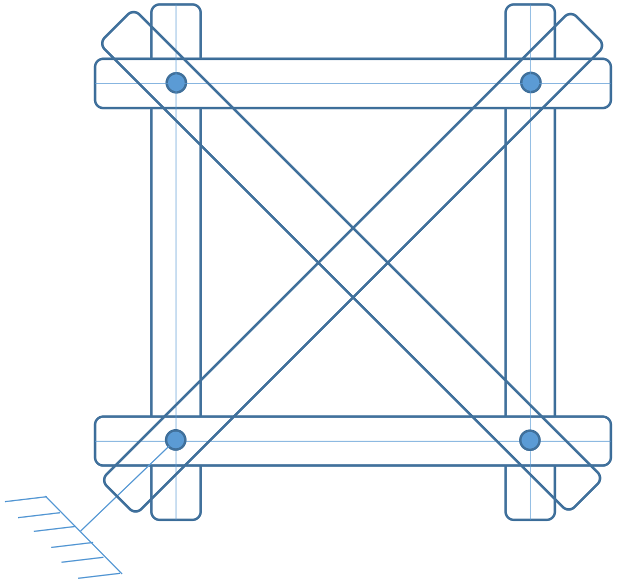


5 barres -> Es = 3 x 5 = 15
6 pivots + 1 encastrement
-> Is = 6x2 + 3 = 15
Pas de mobilité Mc = 0
Ms = 0 Isostatique

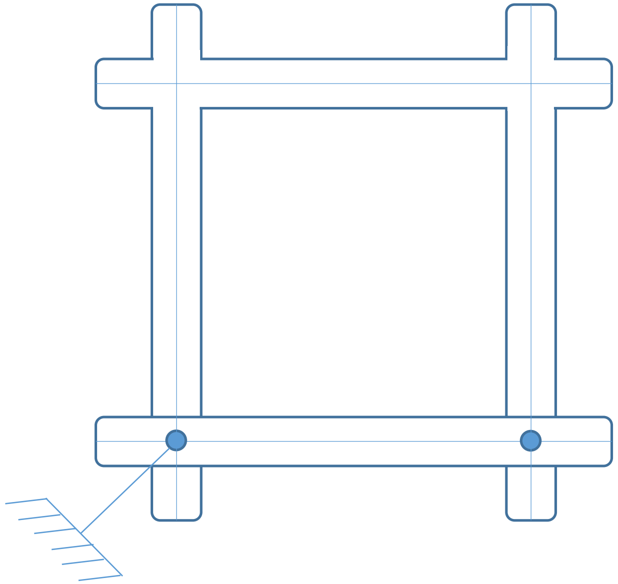


3 barres -> Es = 3 x 3 = 9
3 pivots + 1 encastrement
-> Is = 3x2 + 3 = 9
Pas de mobilité Mc = 0
Ms = 0 Isostatique

NATURE DU SYSTÈME : hyperstatisme



6 barres -> Es = 3 x 6 = 18
8 pivots + 1 encastrement
-> Is = 8x2 + 3 = 19
Pas de mobilité Mc = 0
Ms = 1 hypertatique



2 barres -> Es = 3 x 2 = 6
2 pivots + 1 encastrement
-> Is = 2x2 + 3 = 7
Pas de mobilité Mc = 0
Ms = 1 hyperstatique

MÉTHODOLOGIE DE RÉSOLUTION

1 - On isole le solide et on le dessine isolé. On commence en priorité par isoler les solides soumis à 2 forces.
2 - On détermine le torseur des actions transmissibles pour chacune des liaisons
3 - On détermine les actions extérieures appliquées au solide isolé en appliquant le principe fondamental de la statique.

Résolution partielle.
1 - On isole un solide ou des groupes de solides. On commence en priorité par isoler les solides soumis à 2 forces.
2 - On détermine le torseur des actions transmissibles pour chacune des liaisons
3 - On détermine les actions extérieures appliquées au solide isolé en appliquant en partie le principe fondamental de la statique.

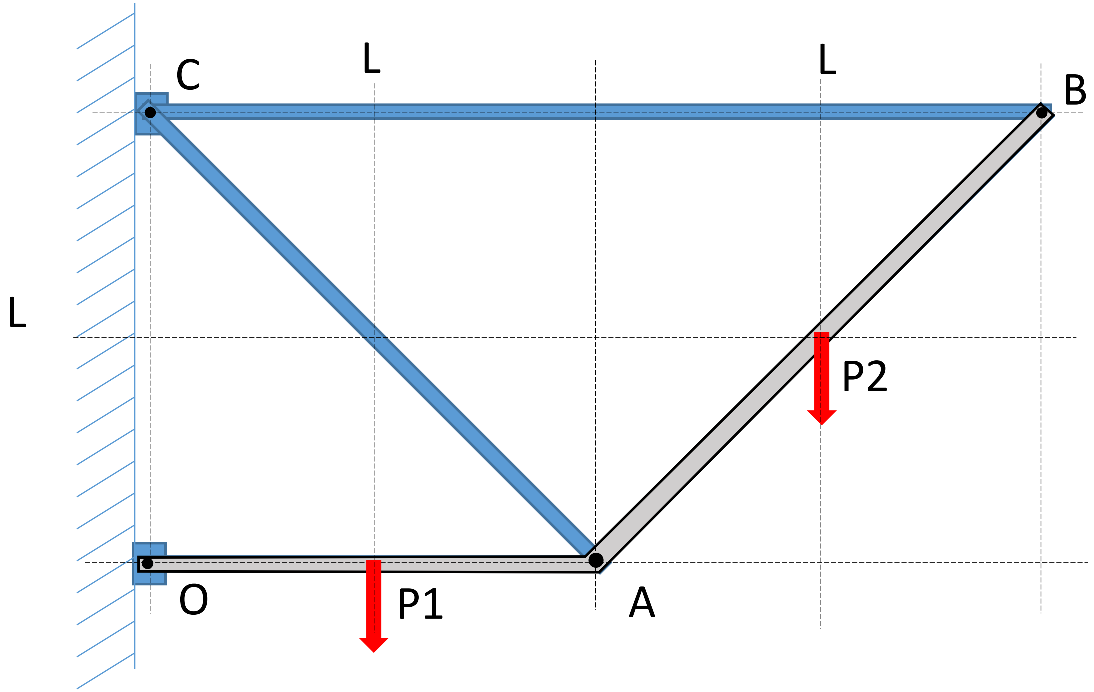
MÉTHODOLOGIE DE RÉSOLUTION : Exemple

Hypothèses:

Système treillis constitué dé 2 poutres (OA) et (AB) et de 2 barres (AC) et (CB)

On suppose le problème plan

Les liaisons en O, A, B et C sont des liaisons pivots supposées parfaites.



I / Montrer en prenant en compte les solides qui composent le système et en identifiant les paramètres Es, Is, mc et ms que le système est isostatique.

II/ Calculer l'effort dans les barres (AC) et (CB)

MÉTHODOLOGIE DE RÉSOLUTION : Exemple

On s’intéresse à un équipement d’atelier utilisé pour lever et transporter une masse

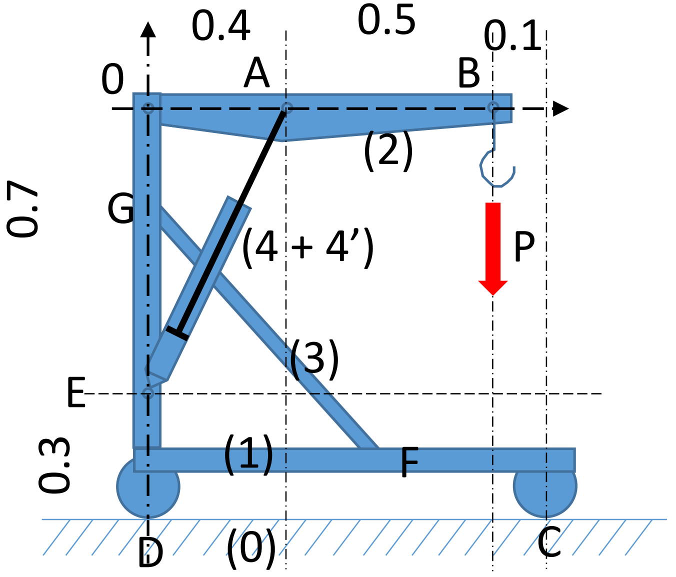
Hypothèses:

On considère le problème plan

Le poids des éléments de la grue est négligé devant l’intensité des efforts extérieurs.

Les liaisons en O, A, B et E sont des liaisons pivots supposées parfaites.

Les liaisons en F et G sont supposées encastrée



(0) -> Sol
(1) -> Bâti
(2) -> Bras
(3) -> Renfort
(4) -> Vérin

I / Montrer en prenant en compte les solides qui composent le système et en identifiant les paramètres Es, Is, mc et ms que le système est isostatique.

II / Identifier les solides soumis à 2 forces ainsi que l’effort auxquels ils sont soumis en fonction de la position des points.

III / Calculer l’effort dans le vérin en fonction de P

On s’intéresse à une grue de port utilisée pour charger ou décharger les bateaux

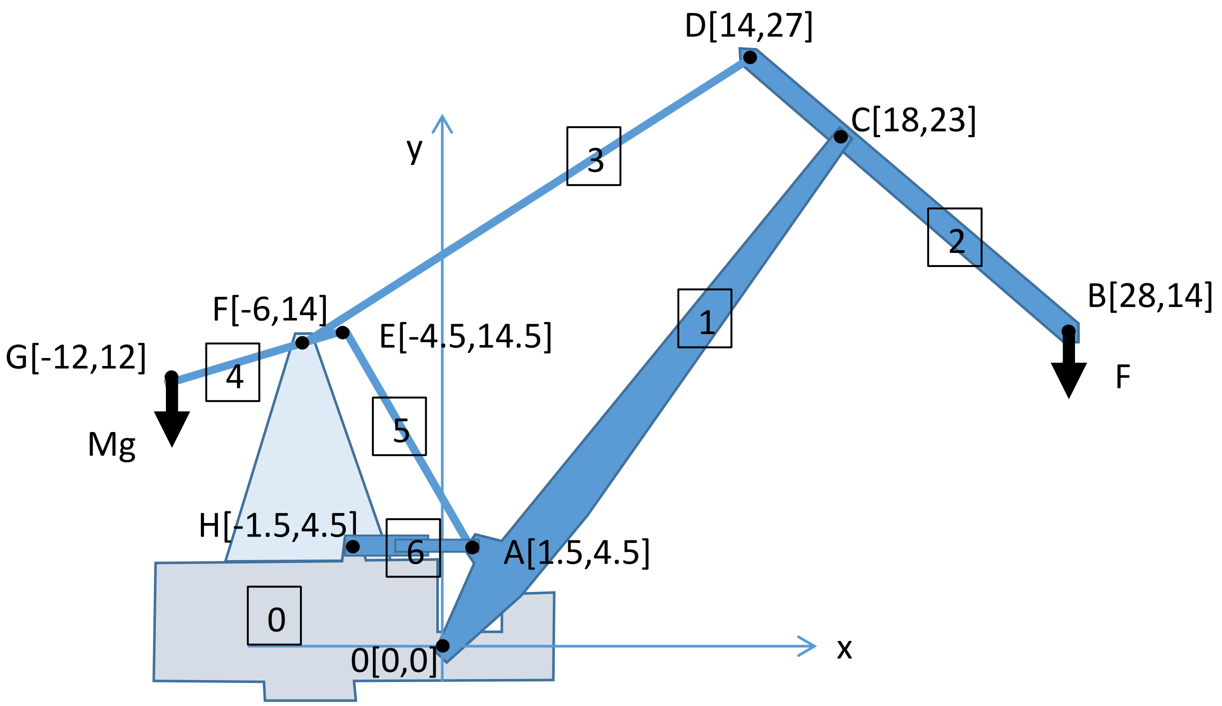
Hypothèses:

On considère le problème plan

Le poids des éléments de la grue est négligé devant l’intensité des efforts extérieurs.

Les liaisons en O, A, B, C, D, E, F, G et H sont des liaisons pivots supposées parfaites.

O cabine
1 bras
2 bras
3 contrefiche
4 balancier
5 contrefiche
6 Verin



I / Montrer en prenant en compte les solides qui composent le système et en identifiant les paramètres Es, Is, mc et ms que le système est isostatique.

II / Identifier les solides soumis à 2 forces ainsi que l’effort auxquels ils sont soumis en fonction de la position des points.

III / Calculer l’effort dans le vérin en fonction de F et Mg

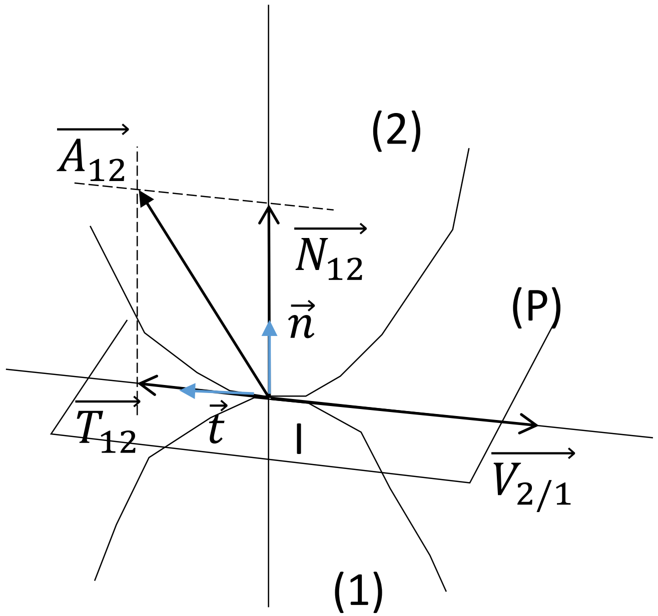
Chapitre III : Frottement

Le frottement est un phénomène constaté au niveau de la surface de contact entre deux solides. Le frottement est une force qui s'oppose au mouvement relatif des deux corps. Le frottement sec, entre deux surfaces non lubrifiées, est un phénomène complexe pour lequel il n'existe pas de théorie fondamentale. Ce phénomène utile ou néfaste est dissipateur d'énergie.

LES LOIS DU FROTTEMENT (DE COULOMB)

Formalisme :

Soit un point de contact I entre deux solides 1 et 2. Le solide étudié est le solide 2 dans son mouvement par rapport à 1 :
Soit ($\vec{n}$) le vecteur normal au plan tangent (P) en I, orienté de 1 vers 2. Dans le cas d'un contact parfait, l'action mécanique élémentaire transmissible par le contact est modélisée par une force ponctuelle $\overrightarrow{N_{12}}$ orientée suivant ($\vec{n}$).
Le phénomène de frottement se traduit par une action mécanique $\overrightarrow{A_{12}}$ qui s'oppose au point d'étude à la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{2/1}}$
Il est modélisé par une composante normale $\overrightarrow{N_{12}}$ orienté suivant ($\vec{n}$) et une composante tangentielle $\overrightarrow{T_{12}}$ orientée suivant ($\vec{t}$)



$\overrightarrow{N_{12}}$ est toujours orienté vers le solide isolé

$\overrightarrow{T_{12}}$ s’oppose au déplacement relatif

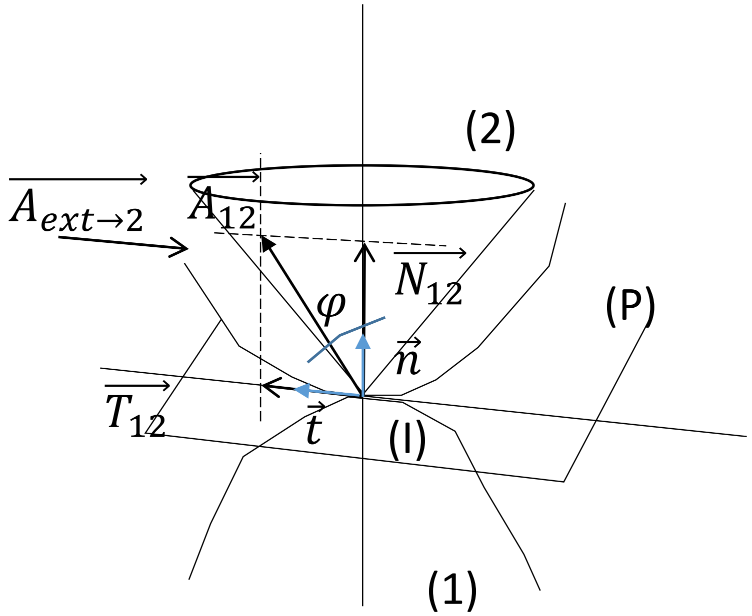
Cas de l'adhérence

Soit un point de contact P entre deux solides 1 et 2. Le solide étudié est le solide 2 :
Soit le vecteur normal au plan tangent ($\vec{n}$) en P, orienté de 1 vers 2. Si il y a adhérence en P entre les solides (1) et (2), alors il n'y a pas de mouvement relatif entre le solide (2) et le solide (1) au point (P).
Le phénomène de frottement au point (P) est modélisé par une action mécanique entre (1) et (2) qui se décompose en une composante normale $\overrightarrow{N_{12}}$ orientée suivant ($\vec{n}$) et une composante tangentielle $\overrightarrow{T_{12}}$ orientée suivant ($\vec{t}$)

La direction du vecteur ($\vec{t}$) étant à priori quelconque dans le plan tangent, il apparaît que la force élémentaire transmissible $\overrightarrow{A_{12}}$ est à l'intérieur d'un cône de demi angle au sommet φ. Ce cône est souvent appelé cône de frottement ou cône d'adhérence.
le coefficient f étant appelé coefficient de frottement d'adhérence avec :

$$\left|\frac{\overrightarrow{T(1/2)}}{\overrightarrow{N(1/2)}}\right| < f$$

Quand le glissement apparait, la force résultant du contact entre (1) et (2) est sur le cône de frottement



$$\left|\frac{\overrightarrow{T(1/2)}}{\overrightarrow{N(1/2)}}\right| < f$$

Cas limite du glissement

$$\overrightarrow{V(I,2/1)} \wedge \overrightarrow{T(1/2)} = \vec{0}$$

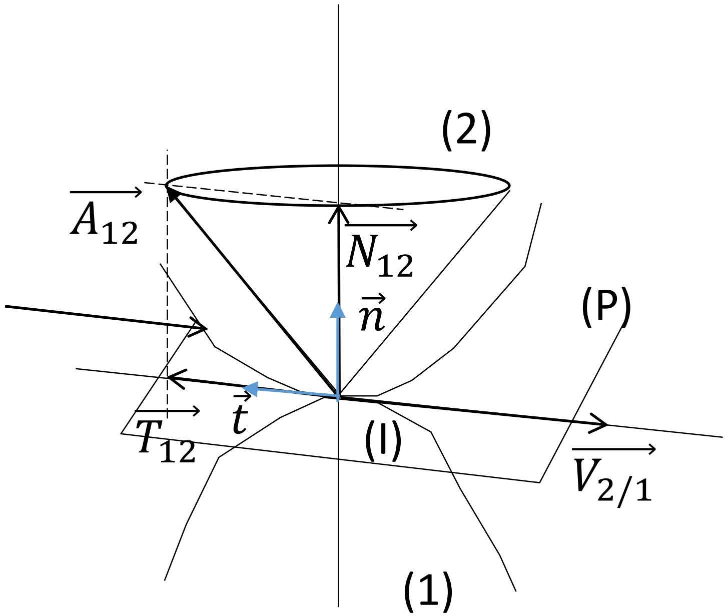
$$\overrightarrow{V(I,2/1)} . \overrightarrow{T(1/2)} < \vec{0}$$

- Le produit vectoriel nul exprime la colinéarité de la composante tangentielle de la résultante due au contact et de la vitesse de glissement.
- Le produit scalaire négatif exprime la dissipation d'énergie au niveau du contact.
- Le module de la composante tangentielle se déduit du module de la composante normale par la relation :

$$\left|\frac{\overrightarrow{T(1/2)}}{\overrightarrow{N(1/2)}}\right| = f$$

le coefficient *f* étant appelé coefficient de frottement de glissement.

Lorsque le glissement est établi -> plus d'état d'équilibre



$$\left|\frac{\overrightarrow{T(1/2)}}{\overrightarrow{N(1/2)}}\right| = f$$

$\tan(\varphi) = f$

CAS DE LA LIAISON CONTACT PONCTUEL

L'action mécanique transmissible par une liaison contact ponctuel est un glisseur dont l'axe central passe par le point de contact. Sa modélisation s’écrit donc

CAS D’UNE ARTICULATION

En l’absence de frottement au sein d’une articulation, l'action mécanique transmissible est modélisé par un glisseur dont l'axe central passe par le centre de la liaison.
On a donc 2 inconnues : L’intensité et la direction.

En présence de frottement au sein d’une articulation, l'action mécanique transmissible est modélisé par un glisseur dont l'axe central ne passe plus par le centre de la liaison.
On a alors 3 inconnues : L’intensité et la direction et la position du support.

LES AUTRES CAS

Pour toutes les liaisons où il existe une surface de contact, il faut reconstruire le torseur d'actions mécaniques transmissibles par intégration à partir du point de vue local.

VALEUR DES COEFFICIENTS DE FROTTEMENT

La valeur d'un coefficient de frottement de glissement dépend : (par ordre d'importance décroissant)

* du couple de matériaux en contact.
* de la lubrification.
* de l'état de surface des matériaux.
* de la température.

La valeur d'un coefficient d'adhérence pour un couple de matériaux donnés est supérieure ou égale à la valeur du coefficient de frottement de glissement pour ce même couple de matériaux, du fait de l'influence plus grande de l'état de surface. Néanmoins, pour une première approche et dans la majorité des cas, confondre les deux valeurs est tout à fait raisonnable.

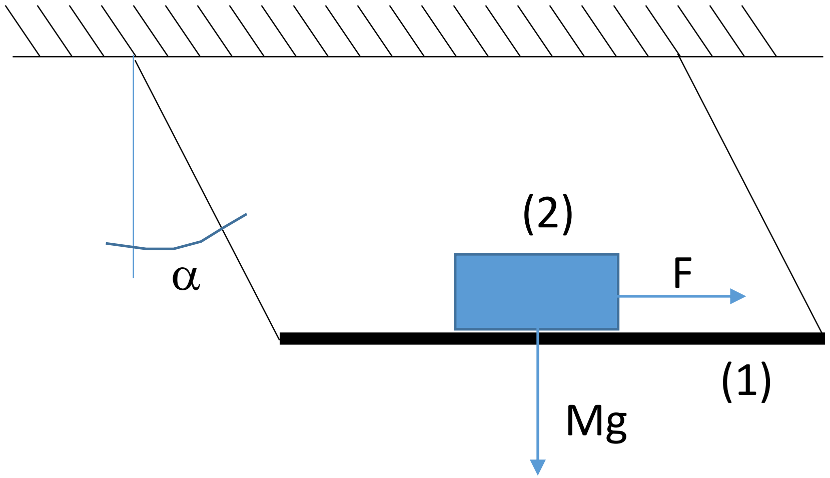
La valeur d'un coefficient de frottement ne dépend pas

* de la nature géométrique et de l'aire de la surface de contact.
* de l'intensité de l'effort normal.

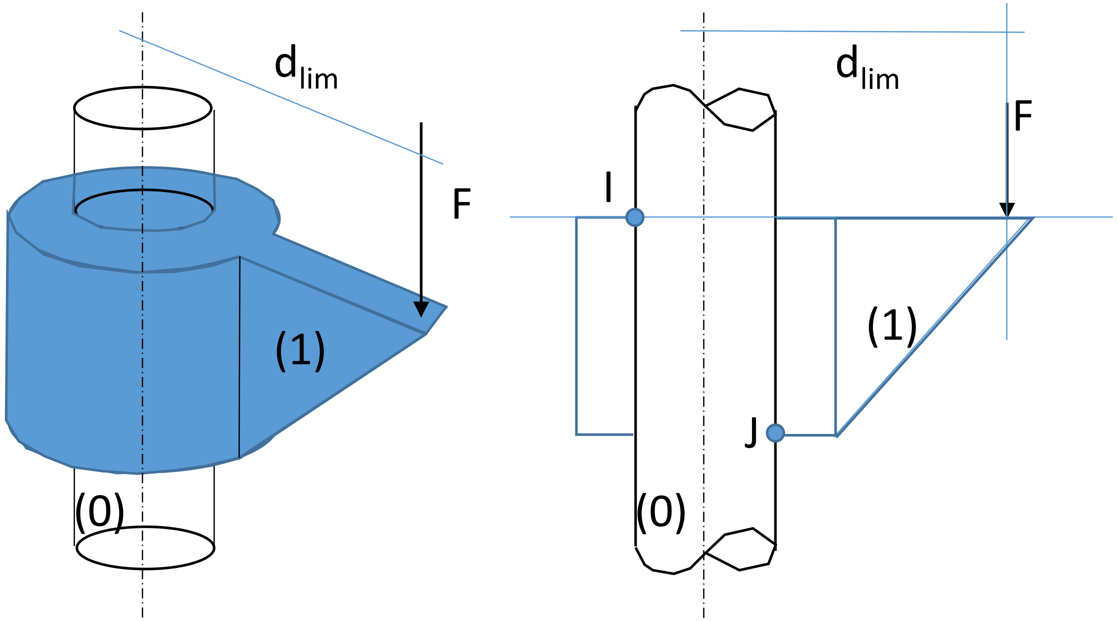
Valeurs usuelles des coefficients de frottement de glissement

Mat é r i aux en contact	frottement sec	frottement lubrifié	Exemples d'utilisation
Acier /Acier	0,15	0,1	variateur a friction
Acier / bronze	0,15	0,1	vis sans fin
Acier / Nylon		0,05	palier lisse
Acier / teflon	0,07		palier lisse
Acier / caoutchouc	0,32		Courroie
Fonte / Ferrodo	0,4		frein

Exercices :



Plateau suspendu par 2 câbles supporte un solide (2) soumis à un effort horizontal F.
Lorsque l'angle atteint la valeur α_l, (2) glisse sur (1)
Calculez la valeur de pour une masse de plateau négligeable
et pour une masse de plateau (m)



Arc Boutement
Valeur de dlim pour laquelle (1) se bloque

1 - Une caisse de poids **(P)** est posée dans la benne. Le coefficient de frottement entre la benne et la caisse est de 0.4 (f=0.4). A partir de quelle valeur **(θ_1)** y a-t-il glissement de la caisse ?

2 – Pour contrôler le glissement de la caisse, elle est maintenant maintenue par le câble **IJK** et est en bascule sur le point **(O)** avec f=0.4. L'inclinaison de la caisse avec l'horizontale est $\boldsymbol{\theta_2}$**.** Exprimer l'effort F appliqué en K en fonction de P, L, d, H, h et le paramètres d'inclinaison θ_1 et θ_2 .